PROBLEMAS (tema 5) DE MÉTODOS MATEMÁTICOS I **1ºA y 1ºB**

HOJA Nº11 (18 – 12 – 2020)

103. Encuentra la derivada de las funciones siguientes:

$$f_1(x) = \sqrt{sen 4x} \quad f_2(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}} \quad f_3(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3-1}} \quad f_4(x) = \frac{-2(2-x)\sqrt{1+x}}{3}$$

104. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de las funciones siguientes?

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

105. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado

$$y = (x^2+2)^3 \text{ en } x = -1$$

$$y = sen\, 3x + 4x \cos 5x \text{ en } x = \pi$$

106. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor de x indicado

$$y = 4x^2 + 7x \text{ en } x = -1$$

$$y = x - \frac{1}{x} \text{ en } x = 1$$

107. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto en el que el valor de la segunda derivada sea 0.

108. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones reales de variable real en el punto $x_0 = 1$

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \sqrt{1-x^2} \quad f_3(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

109. Halla todos los puntos en los que cada f_i **no** es derivable

$$f_1(x) = (x-3)^{2/3} \qquad f_2(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & x \le 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & 0 < x \\ x^2 - 4 & x \le 0 \end{cases}$$

110. Encuentra la segunda derivada de:

$$f_1(x) = 4x^{3/2} \qquad f_2(x) = \frac{x^2+2x-1}{x} \qquad f_3(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f_4(x) = x + \frac{32}{x^2}$$

111. Calcula:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(sen(x))}{(\pi - 2x)^2}$$

PROBLEMAS (tema 5) DE MÉTODOS MATEMÁTICOS I **1ºA y 1ºB**

HOJA Nº12 (18 – 12 – 2020)

112. Prueba que la siguiente función no es continua ni derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 0 \\ -x^2 + 4 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

113. ¿Qué valores deben tener $a, b \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función cumpla las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo $[2, 6]$? Y calcula el valor o los valores vaticinados por dicho teorema.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

114. Escribe las siguientes funciones como composición de otras dos funciones y luego aplica la regla de la cadena para determinar su derivada

$$f(x) = (x^2+1)^3 \qquad f(x) = \sqrt{3x^2 - x + 1} \qquad f(x) = \cos(x-1)$$

115. Halla los puntos en los que las funciones siguientes no son derivables

$$f(x) = |x^2 - 9| \qquad g(x) = \frac{1}{1+x}$$

116.Halla las dos rectas tangentes a la gráfica de $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$.

117. Determina si es aplicable el teorema de Rolle a f sobre el intervalo que se indica. Si es aplicable halla todos los valores c del intervalo en los que $f'(c) = 0$.

a) $f(x) = 1 - |x-1|$ $\quad [0, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 2x$ $\quad [0, 2]$

c) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ $\quad [1, 3]$

d) $f(x) = x^{2/3} - 1$ $\quad [-8, 8]$

e) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$ $\quad [-1, 3]$

118. Aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo $[0, 1]$. En cada caso, halla los valores c del intervalo $(0, 1)$ para los que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

a) $f(x) = x^{2/3}$ $\qquad$ b) $f(x) = x^3$

119. Halla los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente, y localiza los extremos relativos

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

c) $f(x) = x^{1/3} + 1$

120. Dada la función: $f(x) = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$. Determina: dominio de definición, asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento

PROBLEMAS (tema 5) DE MÉTODOS MATEMÁTICOS I 1ºA y 1ºB

HOJA Nº13 (18 – 12 – 2020)

121. Determina si la función $f(x) = x^3 - x$, es estrictamente monótona en el intervalo que se indica: $a)\ (-1,0)$ $\ b)\ (-1,-\frac{1}{2})$ $\ c)\ (-1,1)$

122. Halla a, b, c y d de manera tal que la función: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en (0,0) y un máximo relativo en (2,2).

123. Esboza la gráfica de una función f tal que

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & x < 4 \\ \text{no definida} & x = 4 \\ < 0 & x > 4 \end{cases}$$

124. Halla los intervalos abiertos donde la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y aquellos donde es cóncava hacia abajo

a) $y = x^2 - x - 2$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

c) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

125. Identifica todos los extremos relativos, utilizando el criterio de la segunda derivada cuando sea posible

a) $f(x) = (x-5)^2$

b) $f(x) = x^{2/3} - 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

126. Dibuja la gráfica de una función con estas características

$$y = \frac{1}{x-2} - 3 \qquad y = |x^3 - 3x^2 + 2x|$$

$$y = \frac{2x}{x^2-1} \qquad y = \frac{x^3}{2x^2-8}$$

127. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales (relativos) de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

128.Prueba, usando algún teorema, que la ecuación $x2 = xsen(x) + cos(x)$ solo tiene una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$

129. Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $3(x^2+y^2)^2 = 10xy + 3$ en el punto $P = (0,1)$.

130. Sea $f(x) = 3 + x^5(x-3)^4$, prueba que su función derivada $f'(x)$ tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0,3)$ y determínalo.

131. Demuestra que la ecuación: $\dfrac{x^2}{2} - \ln(x-1)^2 = \dfrac{5}{2}$, tiene una única solución en $[2, 1+e]$.

PROBLEMAS (tema 5) DE MÉTODOS MATEMÁTICOS I **1ºA y 1ºB**

HOJA Nº14 (18 – 12 – 2020)

132. Encuentra las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{|2x-3|}{x}$.

133. Dada la función: $f(x) = \frac{3-x^2}{2x+2}$. Determina sus asíntotas.

134. Demuestra que la ecuación: $e^{-x} + 2 = x$ tiene una única solución real en el intervalo $[2,3]$.

135. Siendo la función inyectiva: $f(x) = x^3 + x + 3$, halla $(f^{-1})'(5)$, sabiendo que $f(1) = 5$.

136.Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ en el punto $P = (-9,-8)$.

137. Sea $f(x) = \ln(5-x^2)$ y el intervalo $[-2,2]$. ¿Son aplicables los teoremas de Rolle y de Lagrange? En caso afirmativo, hállese el valor intermedio para el que se cumple el teorema.

138. Demuestra que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución. Determina un intervalo de longitud menor que 1 donde se pueda asegurar que está dicha solución.

139. La ecuación $e^x = 1 + x$ tiene una raíz que es $x = 0$. Demuestra que esta ecuación no puede tener otra.

140. Calcula las asíntotas y los extremos relativos de la función: $y = 3x + \frac{3x}{x-1}$

141. Determina los extremos relativos de la función: $f(x) = \frac{x-x^2}{1+3x^2}$

142. Halla las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^4-2x^2}{x^2-1}$, y dibuja la gráfica de $y = f(x)$ a ambos lados de cada una de ellas.

143. Se pretende fabricar una lata de conservas cilíndrica con tapa de un litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

144. Descomponer el número 81 en dos sumando de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

145. Una herencia de 11000 euros debe distribuirse entre dos hermanos. La ley de sucesiones dice que los impuestos a pagar por cada individuo son el producto de su edad, el cuadrado de la cantidad recibida y el factor 1/180000. Sabiendo que el hermano mayor tiene 30 años y el menor 25, encuentra la parte de la herencia que le corresponder a a cada uno de ellos para que la cantidad total de impuestos a pagar entre los dos sea mínima. ¿Qu e cantidad de dinero neto (ya deducidos los impuestos) recibirá cada hermano?

146. Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & x \le 0 \\ x^2 e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

a) Di si será continua en el punto x = 0

b) Encuentra sus puntos de inflexión

147. Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto viene dado por la expresión: $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$. ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio?